# Kreuzungsprobleme für Graphen

Harborth, Heiko

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1996 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.35-41

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

# Kreuzungsprobleme für Graphen

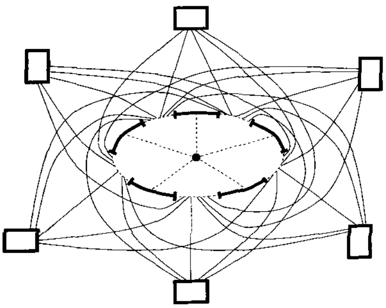
Braunschweig, 8.3.1996*

## 1. Einleitung

Im Jahre 1944 hatte der ungarische Mathematiker Paul Turán (1910–1976) das Glück, in einer Ziegelei arbeiten zu dürfen. Aus den $m$ Brennkammern des Ofens waren die Ziegel in Loren zu $n$ verschiedenen Lagerschuppen zu transportieren. Jede Brennkammer war mit jedem Schuppen durch Schienen verbunden. An den Kreuzungen kippten die Loren leicht um, so daß Zeitverlust und Bruch entstanden. Der Mathematiker überlegte also, wie man das Schienennetz besser gestalten kann, so daß so wenig wie möglich Kreuzungen vorkommen. — Es handelt sich um die Frage nach der kleinsten Anzahl $cr(K_{m,n})$ von Kreuzungen in Darstellungen des vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,n}$ (siehe Figur 1). Ein kleineres Beispiel ist etwa das bekannte Problem, drei Häuser jeweils mit drei Energiequellen so zu verbinden, daß diese Verbindungen sich nicht überkreuzen, das heißt, $cr(K_{3,3})$ ist gefragt. Bisher ist für $\min(m,n) \geq 9$ nur

$$cr(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

bekannt. Dabei gilt Gleichheit, falls $m$ oder $n \leq 8$, und $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl $\leq x$.



*Figur 1.*

* Vortrag vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft

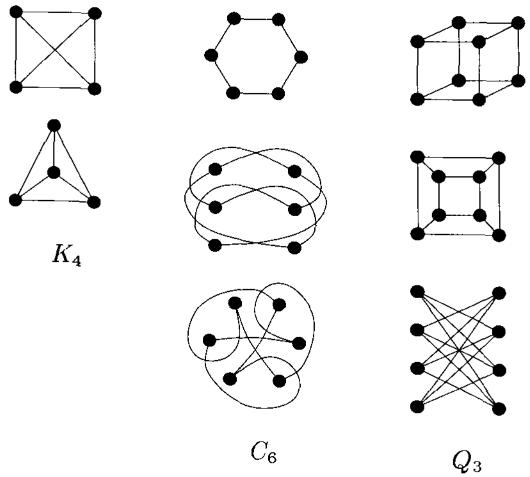
## 2. Nichtisomorphe Darstellungen von Graphen

Als Graphen $G = (V, E)$ werden Paare von Mengen $V$ und $E$ bezeichnet, wobei $V$ eine nichtleere Menge von Knoten und $E$, die Menge der Kanten, eine Teilmenge der Menge der ungeordneten Paare von Elementen aus $V$ ist.

Bei einer Darstellung $D(G)$ werden den Knoten aus $V$ verschiedene Punkte der Ebene (auch Knoten von $D(G)$ genannt) und den Kanten aus $E$ einfache Verbindungskurven (auch Kanten von $D(G)$ genannt) zwischen entsprechenden Knoten so zugeordnet, daß zwei Kanten höchstens einen Punkt gemeinsam haben, entweder einen Knoten oder einen Kreuzungspunkt. Zwei Kanten mit einem gemeinsamen Knoten dürfen sich also gar nicht und zwei disjunkte Kanten höchstens einmal kreuzen.

Als gleich oder isomorph sollen zwei Darstellungen $D_1(G)$ und $D_2(G)$ bezeichnet werden, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen Knoten, Kreuzungen, Kanten, Kantenstücken und Flächen, in die die Ebene eingeteilt wird, so gibt, daß alle Nachbarschaften erhalten bleiben. Anschaulicher ausgedrückt muß sich die eine Darstellung auf einer beliebig dehnbaren Kugel aus Gummihaut so verändern lassen, daß sie mit der anderen zur Deckung kommt.

Einige Darstellungen zeigt Figur 2, für den vollständigen Graphen $K_4$ (jeder Knoten ist mit jedem anderen verbunden), den Kreisgraphen $C_6$ (geschlossenes Polygon mit 6 Punkten) und den Würfelgraphen $Q_3$ (Eckpunkte und Kanten des $n$-dimensionalen Würfels für $n = 3$).

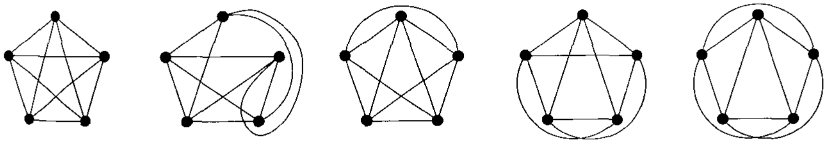



*Figur 2.*

Für die Anzahlen $C(G)$ von nichtisomorphen Darstellungen von Graphen $G$ sind sehr wenige exakte Werte bekannt:

$$\begin{array}{llll} C(K_3)=1, & C(K_4)=2, & C(K_5)=5, & C(K_6)=121; \\ C(C_3)=1, & C(C_4)=2, & C(C_5)=8, & C(C_6)=114; \\ C(K_{3,3})=102. & & & \end{array}$$

In Figur 3 sieht man die 5 Darstellungen von $K_5$. Für den dreidimensionalen Oktaedergraph $O$ ist $C(O)=555$ bekannt, aber $C(Q_3)$ ist bisher noch nicht bestimmt worden. Für den Sterngraph $K_{1,n}$ (ein Knoten ist mit $n-1$ anderen verbunden) gilt natürlich $C(K_{1,n}) = 1$. Ist jedoch $K_{1,n-1}+v$ ein $K_{1,n-1}$, bei dem ein weiterer Knoten $v$ mit einem Endknoten verbunden ist, so gilt $C(K_{1,n-1}+v) = \frac{1+3^{n-2}}{2}$.



*Figur 3.*

## 3. Extremale Kreuzungsanzahlen

Alle Darstellungen $D(G)$ sind offenbar schwer zu erfassen. Wie sieht es jedenfalls mit der kleinsten Anzahl $cr(G)$ und der größten Anzahl $CR(G)$ von Kreuzungen in allen Darstellungen $D(G)$ eines Graphen $G$ aus?

Natürlich ist $cr(C_n)=0$. Aber für $K_n$ ist nur

$$cr(K_n) \leq \frac{1}{4}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor$$

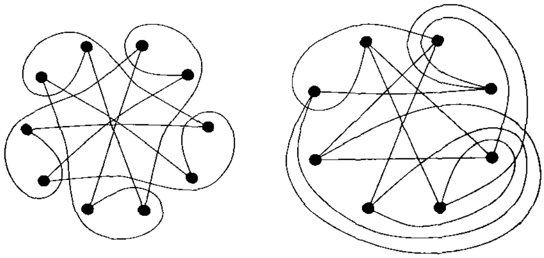
bisher bekannt, wobei Gleichheit für $n \leq 10$ nachgewiesen ist. Es ist also eine offene Frage, ob 11 Punkte in der Ebene so mit Kurven verbunden werden können, daß es weniger als 100 Kreuzungen gibt.

Für den $Q_n$ sind nicht einmal gute Abschätzungen bekannt.

Die maximale Kreuzungsanzahl ist für einige Klassen von Graphen bekannt:

$$CR(K_n) = \binom{n}{4}; \quad CR(K_{m,n}) = \binom{m}{2}\binom{n}{2}; \quad CR(C_n) = \frac{n(n-3)}{2} \text{ für } n \neq 4.$$

Für den Würfelgraphen $Q_n$ ist nur $CR(Q_3)=34$ bekannt. In Figur 4 werden Darstellungen mit $CR(C_{10})=35$ und $CR(Q_3)=34$ gezeigt.



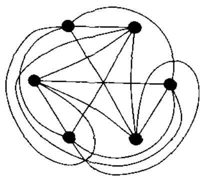
$C_{10}$ $Q_3$

*Figur 4.*

Welche Graphen $G$ haben die Eigenschaft, daß es $D(G)$ gibt, in der jede Kante alle möglichen anderen kreuzt? Hierzu sagt die bisher unbewiesene Vermutung von J. H. Conway, die sogenannte "Thrackle–conjecture", daß für $G$ mit $n$ Knoten höchstens $n$ Kanten möglich sind, daß $G$ also höchstens einen Kreis ($\neq C_4$) enthält.

## 4. Mehrfache Kreuzungen

Mindestens $2m$ Knoten muß ein $K_n$ haben, damit $m$–fache Kreuzungen möglich sind. Man kann $D(K_{2m})$ mit zwei $m$–fachen Kreuzungen immer finden, und es wird vermutet, daß nie mehr als zwei möglich sind. Für $m = 3$ und 4 ist das mühsam bewiesen worden. Figur 5 zeigt $K_6$ mit den zwei dreifachen Kreuzungen.



*Figur 5.*

## 5. Kanten mit beschränkter Anzahl von Kreuzungen

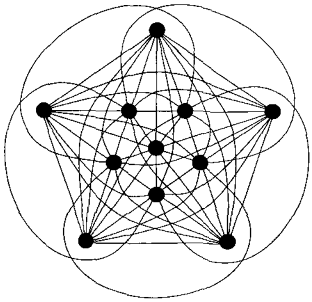
Für manche Probleme kann es interessant sein, möglichst viele ($H_s(G)$) oder möglichst wenige ($h_s(G)$) Kanten mit höchstens $s$ Kreuzungen zu haben. Im Fall $H$ sind für den vollständigen Graphen $K_n$ bekannt:

$$H_0(K_n) = n - 2;\ H_1(K_n) = 2n - 2 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + z,\ 0 \leq z \leq 9,\ n \geq 8.$$

Im Fall $h$ ist $h_0(K_n) = 1, 3, 4, 4, 3, 2, 0$ jeweils für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, \geq 8$. Allgemein konnte

$$h_s(K_n) = 0 \text{ für } n > \frac{4}{3}s + c\sqrt{s}$$

mit einem konstanten Faktor $c$ bewiesen werden. Aus Figur 6 folgt $h_1(K_{11}) = 0$. Gibt es $D(K_{10})$ so, daß jede Kante mindestens einmal gekreuzt wird?



*Figur 6.*

## 6. Gleichviele Kreuzungen auf jeder Kante

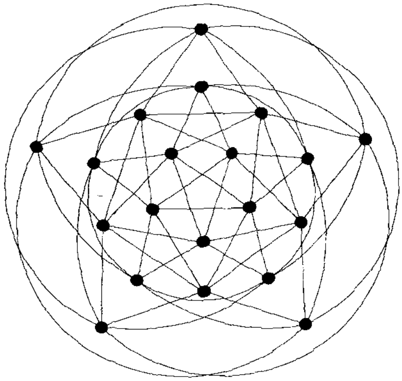
Natürlich gibt es Graphen, die eine Darstellung zulassen in der jede Kante $r$–mal gekreuzt ist. Welches ist die maximale Anzahl $q_r(n)$ von Kanten in Graphen $G$ mit $n$ Knoten, so daß eine Darstellung $D(G)$ mit $r$ Kreuzungen auf jeder Kante möglich ist? Bekannt sind für $r = 0$ die planaren Graphen, für die $q_0(n) = 3n - 6$ aus der Eulerschen Polyederformel folgt. Für $r = 1$ gilt

$$q_1(n) = \begin{cases} 2n-4 & , \quad n \equiv 0 \pmod 2 \quad , \quad n \geq 8 \\ 2n-6 & , \quad \text{sonst} \; , \end{cases}$$

und für $r = 2$ gilt zum Beispiel

$$q_2(n) = \frac{10}{3}(n-2), \, n \equiv 2 \pmod 3, \, n \geq 20, \, n \neq 23.$$

In Figur 7 ist für $n = 20$ eine Darstellung mit 60 jeweils zweimal gekreuzten Kanten gezeigt.



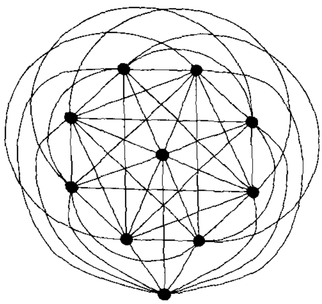
*Figur 7.*

## 7. Eine Darstellungs-Ramsey-Zahl

Vielleicht ist es zur Bestimmung der kleinsten Kreuzungsanzahl von $K_n$ nützlich, Darstellungen zu suchen, in denen keine Teildarstellungen des $K_5$ mit $CR(K_5) = 5$ Kreuzungen vorkommen? Aus der Ramsey–Theorie läßt sich aber beweisen, daß immer eine kleinste Anzahl $Dr(K_n) = d$ so existiert, daß jede Darstellung $D(K_d)$ mindestens eine Teildarstellung mit maximaler Anzahl $CR(K_n)$ von Kreuzungen enthält. Für $n = 5$ konnte mühsam

$$11 \leq Dr(K_5) \leq 113$$

bewiesen werden. Die untere Abschätzung folgt aus der $D(K_{10})$ in Figur 8, in der kein Teilgraph $K_5$ der ersten oder zweiten Darstellung aus Figur 3 vorkommt. Gibt es $D(K_{11})$ mit der gleichen Eigenschaft?



*Figur 8.*

## 8. Kreuzungsfreie Kanten und maximale Kreuzungsanzahl

Betrachtet man nur solche $D(K_n)$, die $CR(K_n) = \binom{n}{4}$ Kreuzungen haben, so kann man beweisen, daß höchstens $n$ Kanten ungekreuzt sein können. Als Kreis von Kanten ohne Kreuzung ist nur der $C_n$ möglich. Alle Anzahlen $a$ von Kanten ohne Kreuzung sind für $2 \leq a \leq n$ in $D(K_n)$ ohne Kreise möglich. Gibt es $D(K_n)$ mit $\binom{n}{4}$ Kreuzungen so, daß keine oder nur eine Kante ohne Kreuzungen bleibt?

## 9. Schlußbemerkungen

Viele weitere Probleme über Kreuzungen in Darstellungen von Graphen in der Ebene, die bei allen Arten von Vernetzungen von Interesse sein können, bleiben ungenannt. Zum Beispiel, welche Anzahlen von Kreuzungen sind zwischen Maximum und Minimum etwa für den vollständigen Graphen $K_n$ überhaupt möglich? Oder, gibt es gute asymptotische Abschätzungen für die Anzahl $C(G)$ von Darstellungen für einzelne Graphenklassen, wie $C_n$, $K_n$ oder $Q_n$? Abschließend sollen aber noch einmal zwei Probleme mit 11 Punkten für Tüftler wiederholt werden: (1) Kann man 11 Punkte paarweise in der Ebene so verbinden, daß weniger als 100 Kreuzungen entstehen? – (2) Kann man 11 Punkte in der Ebene paarweise so verbinden, daß die Verbindungen von je 5 Punkten niemals 5 Kreuzungen bestimmen?

Prof. Dr. H. Harborth
Diskrete Mathematik
Technische Universität Braunschweig
Pockelsstraße 14 · D-38106 Braunschweig
e-mail: h.harborth@tu-bs.de